

Исследование функций. Построение графиков.

Определение 1. Точка x_0 называется *точкой локального минимума (максимума)* функции $f(x)$, если существует такое положительное число δ , что неравенство $f(x_0) \leq f(x)$ ($f(x_0) \geq f(x)$) выполнено для всех точек x из множества $B_\delta(x_0)$.

Точка x_0 называется *точкой строгого локального минимума (максимума)* функции $f(x)$, если существует такое положительное число δ , что неравенство $f(x_0) < f(x)$ ($f(x_0) > f(x)$) выполнено для всех точек x из множества $\overset{\circ}{B}_\delta(x_0)$.

Определение 2. Функция $f(x)$ *возрастает (не убывает)* в точке x_0 , если существует такое положительное число δ , что $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$) при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) при всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Функция $f(x)$ *убывает (не возрастает)* в точке x_0 , если существует такое положительное число δ , что $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$) при всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Определение 3. Точка x_0 называется *стационарной точкой* функции $f(x)$, если $f'(x_0) = 0$.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (A, B) , $A < a < b < B$ и $f'(a) \cdot f'(b) < 0$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство. Пусть, например, $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$. Тогда функция $f(x)$ возрастает в точке a и убывает в точке b (по теореме о достаточном условии возрастания (убывания) функции в точке). С другой стороны, $f(x)$ дифференцируема на $[a, b]$, следовательно, непрерывна на этом сегменте. Значит, в силу второй теоремы Вейерштрасса, существует такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$. Из сказанного выше следует, что $c \neq a$ и $c \neq b$, следовательно, c — точка локального максимума $f(x)$ и $f'(c) = 0$ (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции). $\square$

Следствие. (Теорема Дарбу). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (A, B) , $A < a < b < B$, $f'(a) = \alpha$, $f'(b) = \beta$. Тогда для любого числа γ из сегмента $[\alpha, \beta]$ (или $[\beta, \alpha]$) найдется такая точка $c \in [a, b]$, что $f'(c) = \gamma$.

Доказательство. Если $\gamma = \alpha$ или $\gamma = \beta$, то утверждение очевидно. В противном случае применим теорему 1 к функции $g(x) = f(x) - \gamma x$. $\square$

Теорема 2. (Первое достаточное условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в проколотой δ -окрестности точки c для некоторого $\delta > 0$ и непрерывна в точке c . Тогда

1) если $f'(x) > 0$ при всех $x \in (c - \delta, c)$ и $f'(x) < 0$ при всех $x \in (c, c + \delta)$, то c — точка строгого локального максимума $f(x)$;

2) если $f'(x) < 0$ при всех $x \in (c - \delta, c)$ и $f'(x) > 0$ при всех $x \in (c, c + \delta)$, то c — точка строгого локального минимума $f(x)$;

3) если $f'(x)$ не меняет знак при переходе через точку c , то экстремума в этой точке нет.

Замечание 1. Если $f'(x)$ существует в проколотой окрестности точки c и меняет знак при переходе через эту точку, то возможен только один из двух случаев: $f'(c)$ не существует или $f'(c) = 0$ (теорема 1).

Доказательство. Пусть точка $x_0 \in \overset{\circ}{B}_\delta(c)$. Тогда $f(c) - f(x_0) = f'(\xi)(c - x_0)$ (теорема Лагранжа; точка ξ лежит между c и x_0). Если $x_0 < c$, то $\xi \in (x_0, c)$, следовательно, $f'(\xi) > 0$, $c - x_0 > 0$, значит, $f(c) > f(x_0)$. Если же $x_0 > c$, то $f'(\xi) < 0$, $c - x_0 < 0$, значит опять $f(c) > f(x_0)$. Получаем, что c — точка строгого локального максимума. Вторым пунктом рассматривается аналогично.

Если $f'(x)$ не меняет знак при переходе через точку c , то выражение $f(c) - f(x_0)$ меняет знак, следовательно, экстремума в точке c нет. $\square$

Теорема 3. (Второе достаточное условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки c , причем $f'(c) = 0$, и пусть существует $f''(c)$. Тогда, если $f''(c) < 0$ ($f''(c) > 0$), то c — точка строгого локального максимума (минимума) $f(x)$.

Доказательство. Предположим, что $f''(c) < 0$. Тогда функция $f'(x)$ убывает в точке c , следовательно, найдется такое число $\delta > 0$, что $f'(x) > f'(c) = 0$ при всех $x \in (c - \delta, c)$ и $f'(x) < f'(c) = 0$ при всех $x \in (c, c + \delta)$. Согласно теореме 2, это означает, что c — точка строгого локального максимума функции $f(x)$. Случай $f''(c) > 0$ рассматривается аналогично. $\square$

Замечание 2. Если $f'(c) = 0$ или не существует, то теорема «не работает».

Теорема 4. (Третье достаточное условие экстремума). Пусть n — некоторое нечетное натуральное число. Если функция $f(x)$ n раз дифференцируема в некоторой окрестности точки c и существует $f^{(n+1)}(c)$, причем $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n)}(c) = 0$, $f^{(n+1)}(c) < 0$ (> 0), то c — точка строгого локального максимума (минимума) функции $f(x)$.

Доказательство. Случай $n = 1$ уже рассмотрен в теореме 3. Пусть n — нечетное натуральное число, $n \geq 3$. Предположим, что $f^{(n+1)}(c) < 0$. Тогда функция $f^{(n)}(x)$ убывает в точке c , следовательно, найдется такое число $\delta > 0$, что $f^{(n)}(x) > f^{(n)}(c) = 0$ при всех $x \in (c - \delta, c)$ и $f^{(n)}(x) < f^{(n)}(c) = 0$ при всех $x \in (c, c + \delta)$. Пусть x — произвольная точка из проколотой δ -окрестности точки c . Применим разложение Тейлора с центром в точке c к функции $f'(x)$:

$$f'(x) = f'(c) + \frac{f''(c)}{1!}(x - c) + \frac{f'''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-2)!}(x - c)^{n-2} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x - c)^{n-1}.$$

Здесь ξ — некоторая точка, лежащая между c и x . Поскольку $f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$, то получаем, что $f'(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x - c)^{n-1}$. Если $x < c$, то $\xi \in (x, c)$, следовательно, $f^{(n)}(\xi) > 0$, $(x - c)^{n-1} > 0$ (так как $n - 1$ — четное число), значит, $f'(x) > 0$. Если же $x > c$, то $f^{(n)}(\xi) < 0$, $(x - c)^{n-1} > 0$, значит, $f'(x) < 0$. Получили, что $f'(x) > 0$ при всех

$x \in (c - \delta, c)$ и $f'(x) < 0$ при всех $x \in (c, c + \delta)$, то есть c — точка строгого локального максимума (теорема 2).

Случай $f^{(n+1)}(c) > 0$ рассматривается аналогично. $\square$

Определение 4. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) . Говорят, что график $f(x)$ является **выпуклым вверх (вниз)** на (a, b) , если на этом интервале он лежит не выше (не ниже) касательной в любой точке $x \in (a, b)$.

Замечание 3. Поскольку $|f'(x)| < +\infty$ при всех $x \in (a, b)$, то касательная не может быть параллельна оси Oy , то есть понятие не выше (не ниже) всегда имеет смысл.

Утверждение 1. Если функция $f(x)$ является выпуклой вверх (вниз) на интервале (a, b) , то для любых точек x_1, x_2 , из отрезка $[a, b]$, $x_1 < x_2$, график $f(x)$ на интервале (x_1, x_2) лежит не ниже (не выше) хорды A_1A_2 , где $A_1(x_1, f(x_1))$, $A_2(x_2, f(x_2))$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ является выпуклой вверх, точка $x_0 \in (x_1, x_2)$. Тогда точки A_1 и A_2 лежат по одну сторону от касательной в точке x_0 . Следовательно, и отрезок A_1A_2 лежит под касательной, то есть точка $(x_0, f(x_0))$ — над хордой A_1A_2 . В силу произвольности выбора точки x_0 получаем необходимое утверждение. $\square$

Упражнение 1. Доказать обратное: если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и для любых двух точек $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, график $f(x)$ лежит не ниже (не выше) хорды A_1A_2 , то функция $f(x)$ выпукла вверх (вниз) на (a, b) .

Утверждение 2. (Неравенство Йенсена). Если функция $f(x)$ является выпуклой вверх (вниз) на интервале (a, b) , то для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$ и для любых положительных λ_1, λ_2 таких, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, верно неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \quad (f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)).$$

Доказательство. Пусть $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Тогда точка $x_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in (x_1, x_2)$. Запишем уравнение хорды A_1A_2 : $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$. Подставим в это уравнение точку (x_0, y_0) , принадлежащую хорде:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - x_1}{x_2 - x_1} &= \frac{y_0 - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \Leftrightarrow \frac{(\lambda_1 - 1)x_1 + \lambda_2 x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_0 - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y_0 - f(x_1) = \lambda_2 (f(x_2) - f(x_1)) \Leftrightarrow y_0 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \end{aligned}$$

Если функция $f(x)$ является выпуклой вверх (вниз) на (a, b) , то по определению это означает, что $y_0 \leq f(x_0)$ ($y_0 \geq f(x_0)$). $\square$

Теорема 5. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) \geq 0$) для любой точки $x \in (a, b)$, то $f(x)$ является выпуклой вверх (вниз) на (a, b) .

Доказательство. Пусть $f''(x) \leq 0$ при всех $x \in (a, b)$. Обозначим $M(c, f(c))$, где c — некоторая точка из (a, b) . Запишем уравнение касательной к графику $f(x)$ в точке M : $y = f'(c)(x - c) + f(c)$. С другой стороны, согласно формуле Тейлора с остаточным членом

в форме Лагранжа, $f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2$, где x — произвольная точка из (a, b) , ξ лежит между c и x . Отсюда получаем, что $f(x) - y = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2 \leq 0$, то есть $f(x) \leq y$. Значит, график $f(x)$ лежит не выше касательной, то есть $f(x)$ выпукла вверх. $\square$

Следствие. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки c , причем $f''(x)$ непрерывна в точке c и $f''(c) > 0 (< 0)$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что $f(x)$ выпукла вниз (вверх) в $B_\delta(c)$.

Доказательство. Пусть $f''(c) > 0 (< 0)$. Тогда, в силу теоремы о сохранении знака непрерывной функцией, существует $\delta > 0$ такое, что $f''(x) > 0 (< 0)$ при всех $x \in B_\delta(c)$. Значит, $f(x)$ выпукла вниз (вверх) в $B_\delta(c)$. $\square$

Замечание 4. Если $f''(x) = 0$ при всех $x \in (a, b)$, то $f(x)$ — линейная функция на (a, b) (доказать!) и направление выпуклости можно считать произвольным.

Теорема 6. Пусть функция $f(x)$ является выпуклой вниз (вверх) на интервале (a, b) . Тогда функция $f'(x)$ непрерывна и не убывает (не возрастает) на (a, b) .

Доказательство. Пусть $f(x)$ выпукла вниз на (a, b) ; $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Обозначим через k_0 угловой коэффициент хорды A_1A_2 , $A_1(x_1, f(x_1))$, $A_2(x_2, f(x_2))$. Поскольку касательная к графику $f(x)$ в точке A_1 лежит не выше графика на интервале (x_1, x_2) , следовательно, она лежит не выше хорды A_1A_2 , значит, ее угловой коэффициент $f'(x_1) \leq k_0$. Аналогично $f'(x_2) \geq k_0$, то есть $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. В силу произвольности выбора точек x_1, x_2 получаем, $f'(x)$ не убывает на (a, b) . С другой стороны, известно, что производная принимает все промежуточные значения на отрезке $[x_1, x_2]$ (теорема Дарбу). Следовательно, она непрерывна на этом отрезке (критерий непрерывности монотонной функции). Поскольку x_1, x_2 — произвольные точки из интервала (a, b) , то это означает, что $f(x)$ непрерывна на всем интервале. $\square$

Определение 5. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) , $c \in (a, b)$. Точка $M(c, f(c))$ называется *точкой перегиба* графика $f(x)$, если существует такое число $\delta > 0$, что $B_\delta(c) \subset (a, b)$ и $f(x)$ имеет разные направления выпуклости на интервалах $(c - \delta, c)$ и $(c, c + \delta)$.

Пример 1. для функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ точка $c = 0$ является точкой перегиба.

Лемма 1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) , $c \in (a, b)$ — точка перегиба $f(x)$. Тогда функция $r(x) = f(x) - (f(c) + f'(c)(x - c))$ монотонна в точке c (то есть график функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки c лежит по разные стороны от касательной в точке $M(c, f(c))$).

Доказательство. Пусть $f(x)$ является выпуклой вверх на $(c - \delta, c)$ и вниз на $(c, c + \delta)$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда для любых двух точек x_1, x_2 из интервала $(c - \delta, c)$, $x_1 < x_2$, и для любых положительных λ_1, λ_2 , $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, имеет место неравенство Йенсена: $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$. Перейдем в этом неравенстве к пределу при $x_2 \rightarrow c - 0$:

$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 c) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(c)$. Пусть точка $x_0 \in (x_1, c)$. Обозначим $\lambda_1 = \frac{c - x_0}{c - x_1}$, $\lambda_2 = \frac{x_0 - x_1}{c - x_1}$. Тогда $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 c = \frac{cx_1 - x_0 x_1 + x_0 c - x_1 c}{c - x_1} = x_0$, откуда получаем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} f(x_0) &\geq \frac{(c - x_0)f(x_1) + (x_0 - x_1)f(c)}{c - x_1} \Leftrightarrow (c - x_1)f(x_0) \geq (c - x_0)f(x_1) + (x_0 - c + c - x_1)f(c) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (c - x_1)(f(x_0) - f(c)) \geq (c - x_0)(f(x_1) - f(c)) \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(c)}{c - x_0} \geq \frac{f(x_1) - f(c)}{c - x_1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{f(c) - f(x_0)}{c - x_0} \leq \frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $x_0 \rightarrow c$, получаем из последнего неравенства, что $f'(c) \leq \frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1}$ для любой точки $x_1 \in (c - \delta, c)$. Аналогично можно показать, что $f'(c) \leq \frac{f(x_1) - f(c)}{x_1 - c}$, если $x_1 \in (c, c + \delta)$. Это означает, что $r(x) \leq 0$ при $x \in (c - \delta, c)$, $r(c) = 0$ и $r(x) \geq 0$ при $x \in (c, c + \delta)$, то есть функция $r(x)$ не убывает в точке c . $\square$

Теорема 7. (Необходимое условие перегиба). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке c и точка $M(c, f(c))$ является точкой перегиба $f(x)$. Тогда $f''(c) = 0$.

Доказательство. Предположим, что $f''(c) \neq 0$. Рассмотрим функцию

$$r(x) = f(x) - (f(c) + f'(c)(x - c)).$$

Для нее будут выполнены условия: $r'(c) = f'(c) - f'(c) = 0$, $r''(c) = f''(c) \neq 0$. Это означает, что c — точка строгого локального экстремума функции $r(x)$, что противоречит доказанной выше лемме. Значит, наше предположение неверно и $f''(c) = 0$. $\square$

Замечание 5. Условие $f''(c) = 0$ не является достаточным условием перегиба. Например, для функции $f(x) = x^4$: $f''(0) = 0$, но перегиба в точке 0 нет.

Теорема 8. (Первое достаточное условие перегиба). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в проколотой δ -окрестности точки c для некоторого $\delta > 0$ и пусть существует $f'(c)$. Тогда, если $f''(x)$ имеет разные знаки на интервалах $(c - \delta, c)$ и $(c, c + \delta)$, то c — точка перегиба графика $f(x)$.

Доказательство. Если $f''(x)$ имеет разные знаки на интервалах $(c - \delta, c)$ и $(c, c + \delta)$, значит, функция $f(x)$ имеет разные направления выпуклости на этих промежутках (теорема 5). Но это по определению означает, что c — точка перегиба. $\square$

Замечание 6. Иногда при определении точки перегиба допускается, чтобы $f'(c) = \infty$, то есть чтобы график функции $f(x)$ имел вертикальную касательную в точке c . При таком определении, например, функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ имеет перегиб в точке 0.

Теорема 9. (Второе достаточное условие перегиба). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки c , причем $f''(c) = 0$ и пусть существует $f'''(c) \neq 0$. Тогда c — точка перегиба графика $f(x)$.

Доказательство. Предположим, что $f'''(c) < 0 (> 0)$. Тогда функция $f''(x)$ убывает (возрастает) в точке c , следовательно, найдется такое число $\delta > 0$, что $f''(x) > f''(c) = 0$ ($f''(x) < f''(c) = 0$) при всех $x \in (c - \delta, c)$ и $f''(x) < f''(c) = 0$ ($f''(x) > f''(c) = 0$) при всех $x \in (c, c + \delta)$. Согласно теореме 8, это означает, что c — точка перегиба графика функции $f(x)$. $\square$

Теорема 10. (Третье достаточное условие перегиба). Пусть n — некоторое четное натуральное число. Если функция $f(x)$ n раз дифференцируема в некоторой окрестности точки c и существует $f^{(n+1)}(c)$, причем $f''(c) = f'''(c) = \dots = f^{(n)}(c) = 0$, $f^{(n+1)}(c) \neq 0$, то c — точка перегиба графика функции $f(x)$.

Доказательство. Случай $n = 2$ уже рассмотрен в теореме 9. Пусть n — четное натуральное число, $n \geq 4$, $f^{(n+1)}(c) \neq 0$. Тогда функция $f^{(n)}(x)$ строго монотонна в точке c , следовательно, найдется такое число $\delta > 0$, что $f^{(n)}(x)$ имеет различные знаки на промежутках $(c - \delta, c)$ и $(c, c + \delta)$ (поскольку $f^{(n)}(c) = 0$). Пусть x — произвольная точка из проколотой δ -окрестности точки c . Применим разложение Тейлора с центром в точке c к функции $f''(x)$:

$$f''(x) = f''(c) + \frac{f'''(c)}{1!}(x-c) + \frac{f^{(4)}(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-3)!}(x-c)^{n-3} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}.$$

Здесь ξ — некоторая точка, лежащая между c и x . Поскольку $f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$, то получаем, что $f''(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}$. Выражение $f^{(n)}(\xi)(x-c)^{n-2}$ имеет различные знаки на интервалах $(c - \delta, c)$ и $(c, c + \delta)$ (так как $n - 2$ — четное число). Значит, $f''(x)$ также имеет различные знаки на этих промежутках, то есть c — точка перегиба (теорема 8). $\square$

Определение 6. Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* к графику функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Определение 7. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* к графику функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($-\infty$), если $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) = o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($-\infty$). Если $k = 0$, то прямую $y = b$ называют в таком случае *горизонтальной асимптотой*.

Теорема 11. Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой к графику функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($-\infty$) тогда и только тогда, когда $\lim_{x \rightarrow +\infty(-\infty)} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty(-\infty)} (f(x) - kx) = b$.

Доказательство. Для определенности будем рассматривать случай $x \rightarrow +\infty$.

Необходимость. Пусть $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(k + \frac{b + \alpha(x)}{x} \right) = k;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Достаточность. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$. Тогда $f(x) - kx = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. □

Общая схема исследования функции.

1. Область определения функции.
2. Четность, периодичность.
3. Точки пересечения с координатными осями; промежутки знакопостоянства.
4. Точки разрыва, промежутки непрерывности.
5. Экстремумы, промежутки монотонности.
6. Точки перегиба, выпуклось.
7. Асимптоты (вертикальные, наклонные).